



**Akademik litsey va kasb-hunar kollej o‘quvchilari uchun  
masofaviy olimpiada masalalari  
3-topshiriq (21.04.2017 – 10.05.2017)**

1.  $a^2 + b + 2$ ,  $b^2 + c + 2$ ,  $c^2 + a + 2$  lar to‘la kvadrat bo‘ladigan barcha  $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$  natural sonlar uchliklarini toping.

2. Agar  $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$  funksiya uchun

$$f(x + 3f(y)) = f(x) + f(y) + 2y$$

tenglik ixtiyoriy  $x, y \in \mathbb{Q}$  larda o‘rinli bo‘lsa, u holda  $f$  funksiyani toping.

3.  $ab + bc + ca = \frac{2}{3}$  shartni qanoatlantiruvchi musbat  $a, b, c$  sonlar uchun quyidagi tengsizlikni isbotlang:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3 + (M - m)^2,$$

bu yerda  $M = \max(a, b, c)$  va  $m = \min(a, b, c)$ .

4. Aytaylik, bizga  $\triangle ABC$  berilgan va  $ABZ_1Z_2$ ,  $BCX_1X_2$ ,  $CAY_1Y_2$  to‘g‘ri to‘rtburchaklar uchburchakka tashqi tomondan chizilgan bo‘lsin.  $A'(\cdot)$  – uchburchak tekisligidagi shunday nuqtaki,  $A'X_2 \perp Z_1X_2$  va  $A'X_1 \perp Y_2X_1$  shartlarni qanoatlantiradi. Xuddi shunday,  $B'$  va  $C'$  nuqtalar ham aniqlangan. U holda  $AA'$ ,  $BB'$  va  $CC'$  to‘g‘ri chiziqlar bitta nuqtada kesishini isbotlang.

5.  $C_{2n}^n, C_{2n-1}^n, \dots, C_{n+1}^n$  sonlarining umumiy toq bo‘luvchisi  $2^n - 1$  ning ham bo‘luvchisi ekanini isbotlang. Bu yerda,  $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ ,  $n \geq m$ .

6. Aytaylik, bizga biror  $X$  chekli to‘plam berilgan va bu to‘plam 2 xil usulda  $n$  ta o‘zaro kesishmaydigan  $A_1, A_2, \dots, A_n$  va  $B_1, B_2, \dots, B_n$  qism to‘plamlarga ajratilgan: ya’ni barcha  $i \neq j$  lar uchun  $A_i \cap A_j = \emptyset$ ,  $B_i \cap B_j = \emptyset$  va  $\bigcup_{k=1}^n A_k = \bigcup_{k=1}^n B_k = X$ . Faraz

qilaylik, ixtiyoriy ikkita kesishmaydigan  $A_i$  va  $B_j$  qism to'plamlar uchun  $|A_i \cup B_j| \geq n$  shart o'rinli bo'lsin. U holda  $|X| \geq \frac{n^2}{2}$  ni isbotlang. Bu yerda  $|Y|$  –  $Y$  to'planning elementlari soni.